CONCOURS ELEVES INGENIEURS

de la Ville de Paris

ouvert le 24 avril 1985

Epreuve de mathématiques option durée 4 heures coéfficient 6

I

1°) On considère la série de Riemann , de terme général :

$n \geqslant 1$; $u_n = (\frac{1}{n})^k$. Pour $k > 1$, on note $R_n(k)$ le reste de cette série. $R_n(k) = \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p$.

Démontrer que $R_n(k)$ est majoré par : $v_n(k) = \frac{1}{k-1} n^{1-k}$.

Déterminer la plus petite valeur possible de n pour avoir $v_n(k) \leqslant 10^{-a}$ (a étant un entier positif non nul donné)

Donner un tableau de valeurs pour :

$a \in \{3,4,5\}$ $k \in \{3,4,5\}$

2°) Soit $u_{n,k} = \dfrac{1}{n(n+1)(\ldots(n+k)}$ $k \geqslant 1$. Montrer que la série de terme général $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On pose $s_k = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}$

Calculer $u_{n,k-1} - u_{n+1,k-1}$; en déduire s_k

3°) On considère une suite de terme général w_n admettant au voisinage de l'infini un développement limité à l'ordre $k \geqslant 2$

soit : $w_n = \sum_{i=2}^{i=k} \frac{a_i}{n^i} + \mathcal{E}(n)$ avec $\lim_{n \to +\infty} (n^k . \mathcal{E}(n)) = 0$

Démontrer qu'il existe des réels b_i, $2 \leqslant b_i \leqslant k$ tels que

$w_n = \sum_{i=2}^{k} b_i u_{n,i-1} + \mathcal{E}'(n)$ avec $\lim_{n \to +\infty} (n^k \mathcal{E}'(n)) = 0$

Calculer les coefficients b_i en fonction des a_j pour $i \in \{2,3,4,5\}$

4°) Application numérique :

Déterminer les coefficients b_i, $i \in \{2,3,4,5\}$ tels que:

$\frac{1}{n^2+1} = \sum_{i=2}^{5} b_i u_{n,i-1} + v_n$ avec $\lim_{n \to +\infty} (n^5 v_n) = 0$

Préciser v_n en fonction de n. En majorant $|v_n|$ par une série de Riemann convenable et en utilisant la majoration du 1°), déterminer à 10^{-4} près la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$

II

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, A_o, B_o, C_o trois points distincts non alignés de ce plan. Soit x un réel. On considère la suite de triangles définis par A_o, B_o, C_o et pour tout $n > 0$:

A_{n+1} est le barycentre de B_n et C_n affectés des coefficients x et 1-x

B_{n+1} est le barycentre de C_n et A_n affectés des coefficients x et 1-x

C_{n+1} est le barycentre de A_n et B_n affectés des coefficients x et 1-x

Le but du problème est de déterminer l'ensemble E des réels x tels qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ et une similitude plane directe transformant Ao,Bo,Co en A_n, B_n, C_n.

1°) Démontrer que l'isobarycentre des points A_n, B_n, C_n est celui des points A_o, B_o, C_o.

2°) On considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que O soit l'isobarycentre de A_o, B_o, C_o. On appelle a_n, b_n, c_n les affixes (complexes) des points A_n, B_n, C_n. Exprimer a_n et b_n en fonction de a_{n-1} et b_{n-1} En déduire l'existence d'une matrice M telle que pour tout $n \geqslant 0$:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

3°) Démontrer que x appartient à E si et seulement s'il existe un complexe z et un entier n tels que : $M^n = z.Id$ (Id désignant la matrice unité d'ordre 2). Démontrer alors que z est réel.

4°) En considérant les valeurs propres de A, montrer que x appartient à E si et seulement s'il existe un rationnel q tel que :

$\sqrt{3}\,(2x-1) = \operatorname{tg}(q\pi)$.

III

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 0$ sur $[0, \frac{3}{8}[$ $\qquad$ $f(x) = 8(x - \frac{3}{8})$ sur $[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}[$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+\frac{1}{2}) = 1 - f(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = f(x+\frac{1}{4})$

1°) Construire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) définie par les équations :

$$(C) \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

2°) On définit les fonctions φ et ψ par : $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \sum_0^{\infty} 2^{-n-1} f(8^n t) \quad ; \quad \psi(t) = \sum_0^{\infty} 2^{-n-1} g(8^n t)$$

a) Vérifier que ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $\varepsilon > 0$; montrer $\exists$ N tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \left| \sum_{N+1}^{\infty} 2^{-n-1} f(8^n t) \right| \leqslant \varepsilon$

En déduire $\forall (t,t') \in \mathbb{R}^2 \quad |\varphi(t) - \varphi(t')| \leqslant 2\varepsilon + \left| \sum_0^N (f(8^n t) - f(8^n t')) 2^{-n-1} \right|$

Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$. On admettra de même que ψ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer : $\varphi(2^{-k})$ pour $k \in \mathbb{N}$; $\varphi(\frac{1}{3})$;

d) Montrer que φ n'est pas dérivable en 0. (On pourra utiliser $\varphi(2^{-k})$)

3°) Pour tout x de l'intervalle $[0,1[$, on considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$a_n = 0$ si $E(2^n x)$ est paire

$a_n = 1$ si $E(2^n x)$ est impaire

(E(u) désignant la partie entière de u, zéro est pair)

a) Démontrer que la série entière $\sum_1^{\infty} a_n 2^{-n}$ est convergente.

b) Démontrer que $E(2^n x) = \sum_1^{n} a_i 2^{n-i}$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \left| x - \sum_1^{n} a_i 2^{-i} \right| \leqslant 2^{-n}$

d) Pour x = 1, on pose $\forall i$, $i \geqslant 1$ $\quad a_i = 1$.

Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[0, 1]$ $\quad x = \sum_1^{\infty} a_i 2^{-i}$

4°) Pour tout couple (x,y) de $[0,1]^2$, on considère les décompositions

$x = \sum_1^{\infty} a_i 2^{-i}$ $\qquad$ $y = \sum_1^{\infty} b_i 2^{-i}$ définies au 3°) et on pose

$\forall i \geqslant 1 \quad c_i = 6a_i + 2b_i - 4a_i b_i$ et

$t = \sum_1^{\infty} c_i 8^{-i}$

a) Vérifier que t est bien défini et que $t \in [0, 1]$

b) Calculer $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ en fonction de x et y.

c) Quelle est l'image de $[0, 1]$ par l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $h \longrightarrow (\varphi(h), \psi(h))$